数理解析研究所講究録
第2028巻 2017年 21-28



# The first return maps and invariant measures for random maps

愛媛大学大学院理工学研究科
電気電子工学コース 応用数学分野
井上友喜

Tomoki Inoue
Division of Applied Mathematics,
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

## 1 序

本稿では，ランダム写像 (Random map) 及びその不変測度の定義を明確にした上で，ランダム写像の First return map はどのように定めることができるか，さらに，First return map の不変測度ともとのランダム写像の不変測度との関連について述べる．

ここで考えるランダム写像によるランダム力学系は，いくつかの写像の族の中から一つの写像が順次ランダムに選ばれて，反復されるような系である．すなわち，$W$ を空でない集合として，$\{\tau_t\}_{t\in W}$ という写像の族を考え，$\{\tau_t\}_{t\in W}$ の中から一つの写像が順次ランダムに選ばれ反復されるようなシステムである．

$W$ の要素の数によらず，$\tau_t=\tau_0$ $(t\in W)$ であれば，これは決定論的な力学系と同じである．したがって，ここで考えるランダム力学系は決定論的な力学系の一般化である．また，同様に考えれば，$W$ として連続の濃度をもつ無限集合を考えておけば，$W$ として有限集合や可算集合の場合を考えるまでもない．このように考えると，ランダム写像として，写像の族 $\{\tau_t\}_{t\in W}$ の中から写像 $\tau_t$ が，$W$ 上の確率密度関数 $p(t)$ にしたがって選ばれるものを考えるのが妥当であることがわかる．

さらに，より一般的な場合として，相空間 $X$ 上の位置により，写像の選ばれる確率が異なっていてもよいようなシステム，すなわち，$x\in X$ に対して，写像 $\tau_t$ が $W$

上の確率密度関数 $p(t,x)$ にしたがって選ばれるようなシステムを考えるのは自然である．このような，写像の選ばれる確率が相空間 $X$ 上の位置に依存してもよいようなシステムを位置依存ランダム力学系と呼ぶ．なお，後に明らかになるが，もとのランダム力学系が位置に依存しないものであっても，First return map を考えると，位置依存ランダム力学系が自然に生ずる．

## 2 ランダム写像の定義

この節では，ランダム写像の定義と，ランダム写像の不変測度の定義を確認しておこう．ここで定義するランダム写像は，[I1] や [井上] において研究されたものである．これは，前節で述べたような，写像の選択確率が相空間上の位置に依存してもよいものであり，また，パラメータの空間は連続の濃度をもつものでよく，[Pe] や [M] などで研究されたものや [Ba-G] などで研究されたものを一般化したものである．

まず，パラメータ用の空間と相空間を準備する．$(W,\mathcal{B},\nu)$ と $(X,\mathcal{A},m)$ をそれぞれ $\sigma$-有限測度空間とする．この前提のもとで，$\tau_t : X \to X$ $(t \in W)$ は非特異変換，すなわち，任意の可測集合 $D \in \mathcal{A}$ に対して，$m(D)=0$ ならば $m(\tau_t^{-1}D)=0$ となるとする．また，各 $x \in X$ に対して $\tau_t(x)$ は $t$ の可測関数とする．さらに，$p : W \times X \to [0,\infty)$ は可測で，各 $x \in X$ に対して $W$ 上の確率密度関数，すなわち，$\int_W p(t,x)\ \nu(dt)=1$ とする．

ランダム写像 $T=\{\tau_t; p(t,x)\}$ を次の推移関数 $\mathbf{P}$ をもつマルコフ過程として定める：

$$\mathbf{P}(x,D) := \int_W p(t,x)\ 1_D(\tau_t(x))\ \nu(dt),$$

ここで，$D \in \mathcal{A}$ であり，$1_D$ はその上の定義関数である．

この推移関数 $\mathbf{P}$ により，$X$ 上の測度に対する作用素 $\mathbf{P}_*$ が次のように定まる：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_*\mu(D) : &= \int_X \mathbf{P}(x,D)\mu(dx)\\ &= \int_X \int_W p(t,x)\ 1_D(\tau_t(x))\ \nu(dt)\ \mu(dx),\end{aligned}$$

ここで，$D \in \mathcal{A}$ であり，$\mu$ は $X$ 上の測度である．

$X$ 上の測度 $\mu$ が $\mathbf{P}_*\mu = \mu$ をみたすとき，$\mu$ をランダム写像 $T$ の不変測度と呼ぶ．もしも，$T$ が決定論的な写像，すなわち，$\tau_t = T$ $(t \in W)$ であれば，$\mathbf{P}_*\mu(D) = \mu(T^{-1}D)$ となることから，ここで与えたランダム写像の不変測度の定義は，通常の決定論的な写像の不変測度の定義の一般化であることがわかる．

# 3 The first return map

まず，決定論的な力学系における First return map について復習した上で，前節で定めたランダム写像によるランダム力学系の First return map について考えていく．

特に断らない限り，記号は前節と同様とし，$A$ を $m(A) > 0$ である可測集合とする．

$T$ が決定論的写像なら，$T$ の $A$ 上の First return map $R$ は条件

(1) $$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$$

をみたすときに定義できる．実際，このとき First return map $R$ は

$$R(x) = T^{n(x)}(x), \quad ここで \quad n(x) = \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}$$

として定めることができる．

$T$ がランダム写像なら，どのような条件の下で，$A$ 上の $T$ の First return map $R$ を定めることができるであろうか．この問題について考えてみよう．

ラフに言うと，$A$ 上の $T$ の First return map が定まるためには，$A$ を出発したほとんどすべての軌道は $A$ に戻ってきてくれる必要がある．このことをきちんと表現するために，次のように $\hat{p}_1(x)$，$\hat{p}_2(x)$，$\cdots$, $\hat{p}_n(x)$，$\cdots$ を定める．

$$\hat{p}_1(x) = \int_W p(t,x)\ 1_A(\tau_t(x))\ \nu(dt),$$

$$\hat{p}_2(x) = \int_{W^2} p(t_1,x)\ 1_{X\setminus A}(\tau_{t_1}(x))\ p(t_2,\tau_{t_1}(x))\ 1_A(\tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x)))\ \nu(dt_1)\nu(dt_2),$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_n(x) \ &= \ \int_{W^n} p(t_1,x)\ 1_{X\setminus A}(\tau_{t_1}(x))\ p(t_2,\tau_{t_1}(x))\ 1_{X\setminus A}(\tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x))) \\ &\cdots\ p(t_{n-1},\tau_{t_{n-2}}\circ\cdots\circ\tau_{t_1}(x))\ 1_{X\setminus A}(\tau_{t_{n-1}}\circ\cdots\circ\tau_{t_1}(x))\cdot \\ &\quad p(t_n,\tau_{t_{n-1}}\circ\cdots\circ\tau_{t_1}(x))\ 1_A(\tau_{t_n}\circ\cdots\circ\tau_{t_1}(x))\ \nu(dt_1)\nu(dt_2)\cdots\nu(dt_n).\end{aligned}$$

これらの記号を用いると，a.e. $x \in A$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{p}_k(x) = 1$$

を仮定すればよい．これは，決定論的力学系における (1) に対応する条件であり，$A$ を出発したほとんどすべての軌道が $A$ に戻ってくる確率は 1 であることを意味している．このように仮定すると，$A$ 上の $T$ の First return map $R$ を定めることが可能になる．

実際，次のようにしてランダム写像 $T$ の $A$ 上の First return map $R$ を定めることができる．

まず，First return map のためのパラメータ用の空間として，ランダム写像 $T$ を定めるときに用いた $W$ の無限直積を考え，

$$\widetilde{W} := W^{\mathbb{N}} = \{(t_1, t_2, \ldots) : \ t_k \in W, \ k \in \mathbb{N}\}$$

とおく．

$\tilde{t} \in \widetilde{W}$ に対して，$Pr(\tilde{t}, x)$ と $r_{\tilde{t}}(x)$ を次のように定める．

$\tau_{t_1}(x) \in A$ のとき，$Pr(\tilde{t}, x) := p(t_1, x)$，$r_{\tilde{t}}(x) := \tau_{t_1}(x)$．

$\tau_{t_1}(x) \in X \setminus A$ かつ $\tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x)) \in A$ のとき，

$$Pr(\tilde{t}, x) := p(t_1, x) \cdot p(t_2, \tau_{t_1}(x)), \quad r_{\tilde{t}}(x) := \tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x)).$$

$$\cdots$$

$\tau_{t_1}(x) \in X \setminus A$, $\tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x)) \in X \setminus A$, $\ldots$ , $\tau_{t_{n-1}} \circ \cdots \circ \tau_{t_2} \circ \tau_{t_1}(x) \in X \setminus A$,

かつ $\tau_{t_n} \circ \cdots \circ \tau_{t_2} \circ \tau_{t_1}(x) \in A$ のとき，

$$Pr(\tilde{t}, x) := p(t_1, x) \cdot p(t_2, \tau_{t_1}(x)) \cdots p(t_n, \tau_{t_{n-1}} \circ \cdots \tau_{t_2} \circ \tau_{t_1}(x)),$$
$$r_{\tilde{t}}(x) := \tau_{t_n} \circ \cdots \circ \tau_{t_2} \circ \tau_{t_1}(x).$$

$$\cdots$$

このように定めると，a.e. $x \in A$ に対して $Pr(\tilde{t}, x)$ は $\tilde{W}$ 上の確率密度関数となる．つまり，

$$\int_{\widetilde{W}} Pr(\tilde{t}, x) \tilde{\nu}(d\tilde{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{p}_k(x) = 1 \quad \text{for a.e. } x \in A$$

となる．ただし，$\tilde{\nu}$ は測度 $\nu$ の無限直積とする．

これで，First return map を定めるために必要な写像族 $\{r_{\tilde{t}}\}_{\tilde{t}\in\widetilde{W}}$ と確率密度関数 $Pr(\tilde{t},x)$ が得られた．

**注意**．もとのランダム写像において，$p(t,x)$ が相空間上の位置 $x$ に依存せずに $p(t)$ であったとしても，一般には，$Pr(\tilde{t},x)$ は位置 $x$ に依存する．このことから，位置依存ランダム力学系が数学的に重要であることがわかる．

$A$ 上の $T$ の First return map $R=\{r_{\tilde{t}}\,;Pr(\tilde{t},x):\tilde{t}\in\widetilde{W}\}$ は次のような遷移関数をもつマルコフ過程として定めることができる：

$$\mathbf{P}_R(x,D):=\int_{\widetilde{W}} Pr(\tilde{t},x)\ 1_D(r_{\tilde{t}}(x))\ \tilde{\nu}(d\tilde{t}),$$

ここで，$D$ は $A$ の可測な部分集合である．

前節において，$\mathbf{P}$ から $\mathbf{P}_*$ が導かれたのと同様に，この遷移関数 $\mathbf{P}_R$ により $A$ 上の測度に対する作用素 $\mathbf{P}_{R_*}$ が次のように定められる：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{R_*}\mu_A(D):&=\int_A \mathbf{P}_R(x,D)\mu_A(dx)\\ &=\int_A\int_{\widetilde{W}} Pr(\tilde{t},x)\ 1_D(r_{\tilde{t}}(x))\ \tilde{\nu}(d\tilde{t})\ \mu_A(dx),\end{aligned}$$

ここで，$D$ は $A$ の可測な部分集合であり，$\mu_A$ は $A$ 上の測度である．

前節で確認したランダム写像の不変測度の定義に従い，$\mathbf{P}_{R_*}\mu_A=\mu_A$ をみたす測度 $\mu_A$ を First return map $R$ の不変測度と呼ぶ．

# 4　もとのランダム写像の不変測度の構成法

この節では，決定論的な力学系における First return map の不変測度から，もとの力学系の不変測度を構成する方法について復習した上で，ランダム力学系における First return map の不変測度から，もとのランダム力学系の不変測度をどのようにして構成するかについて述べる．

特に断らない限り，記号は前節までと同様とし，$A$ も $m(A)>0$ である可測集合とする．

$T$ が決定論的写像なら，次のような定理が成り立つことは，よく知られている．

**定理 4.1** [Pi]. $R$ を $A$ 上の決定論的写像 $T$ の First return map とし，$\mu_A$ を $R$ の不変測度とする．このとき，

$$\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(A_n \cap T^{-n}(D)) \quad \text{for any } D \in \mathcal{A}$$

により定まる測度 $\mu$ は，もとの決定論的写像 $T$ の不変測度である．ただし，$A_n$ は $A_1 = A$，$A_{n+1} = A_n \cap T^{-n}(X \setminus A)$ $(n \geq 1)$ により定まるものとする．

さて，$T$ がランダム写像の場合にも，その First return map の不変測度が存在すれば，もとのランダム写像 $T$ の不変測度が定まるのであろうか．$T$ は通常の意味の写像ではないので，やや複雑な形になるが，決定論的な写像の場合と類似した結論をランダム写像の場合にも得ることができる．このことを紹介しておこう．

まず，そのために記号を準備しておく．$\widetilde{A} = X \setminus A$ とし，ランダム写像 $T = \{\tau_t; p(t,x)\}$ に対して，２つの作用素 $U$ と $\widetilde{U} : L^\infty(m) \to L^\infty(m)$ を

$$Uf(x) = \int_W p(t,x)\ f(\tau_t(x))\ \nu(dt),\ \ \widetilde{U}f = U(1_{\widetilde{A}} \cdot f) \quad \text{for} \quad f \in L^\infty(m)$$

として定める．

**注意**．$T$ が決定論的写像なら，$U$ は Koopman 作用素（Koopman 作用素については [Bo-G] や [L-M] など参照）となる．このことから，ここで定めた $U$ は，決定論的写像に対する Koopman 作用素を一般化し，ランダム写像に対して定めたものである．

上記の２つの作用素 $U$ と $\widetilde{U}$ を用いると，定理 4.1 を一般化としたものとして，次のような定式化が可能である．

**定理 4.2** [I2]. $\mu_A$ をランダム写像 $T$ の $A$ 上の First return map $R$ の不変測度とし，測度 $\mu$ を次のように定める：

$$\mu(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A \widetilde{U}^n\,(U1_D)\,(x)\ \mu_A(dx) \quad \text{for any } D \in \mathcal{A}.$$

このとき，$\mu$ は $T$ の不変測度となる．ただし，$\widetilde{U}^0\,(U1_D) = U1_D$ とする．

**注意.** $\mu_A$ が有限測度であっても，$\mu$ が有限測度とは限らないのは，決定論的な力学系の場合と同様である．

決定論的な写像の場合と同じように，次の定理も成り立つ．

**定理 4.3** [I2]. $\mu$ をもとのランダム写像 $T$ の不変測度とする．このとき，$\mu$ を $A$ に制限した測度 $\mu|_A$ は，$T$ の $A$ 上の First return map $R$ の不変測度となる．

## 5 今後の展望

定理 4.2 及び 4.3 は，次元や位相に束縛されないような一般的の形で与えられており，さまざまな場面で応用が可能であると思われる．実際，これらの定理は中立的不動点をもつランダム写像に対して応用可能であり，[I2] においてそのような応用例が与えられる．なお，定理 4.2 を使うためには，与えられたランダム写像 $T$ に対して，適切な可測集合 $A$ を見つけ，その上での First return map の不変測度の存在を示す必要がある．これができれば，ランダム写像 $T$ の不変測度の存在が定理 4.2 により示される．この手順は決定論的力学系の場合と同様であるが，ランダム写像の場合は，First return map の不変測度の存在を示すのがより困難である．ここを解決していく必要があると言える．

### 参考文献


[Ba-G] W.Bahsoun and P.Góra, *Position dependent random maps in one and higher dimensions*, Studia Math. 166 (2005), 271-286.

[Bo-G] A.Boyarsky and P. Góra, *Laws of Chaos*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[I1] T.Inoue, *Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters*, Studia Math. 208 (2012), 11-29.

[I2] T.Inoue, *First return maps of random maps and invariant measures*, in preparation.

[井上] 井上友喜，連続なランダムパラメータをもつランダム写像の不変測度とその評価，京都大学数理解析研究所講究録. 1942 (2015), 59-65.

[L-M] A.Lasota and M.C.Mackey, *Chaos, fractals, and noise, Stochastic aspects of dynamics*, Appl. Math. Sci. 97, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[M] T.Morita, *Random iteration of one-dimensional transformations*, Osaka J. Math. 22 (1985), 489-518.

[Pe] S. Pelikan, *Invariant densities for random maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 813-825.

[Pi] G.Pianigiani, *First return map and invariant measures*, Israel. J. Math. 35 (1980), 32-48.